

Kanazawa University,
Faculty of Economics and Management

Discussion Paper Series

No. 069

Spline Interpolation of Polynomial
Histogram Density Function and Its
Asymptotic Properties

齊藤実祥

寒河江雅彦

saito_misaki@stu.kanazawa-u.ac.jp

sagae.masahiko@gmail.com

2 October 2022



KANAZAWA
UNIVERSITY

金沢大学経済学経営学系

〒920-1192 金沢市角間町

Faculty of Economics and Management,
Kanazawa University

Kakumamachi, Kanazawa-shi, Ishikawa, 920-1192, Japan

https://keikei.w3.kanazawa-u.ac.jp/research_dp.html

Spline Interpolation of Polynomial Histogram Density Function and Its Asymptotic Properties

齊藤実祥 (金沢大学 人間社会環境研究科)

寒河江雅彦 (金沢大学 人間社会研究域)

Misaki Saito (Kanazawa University)

Masahiko Sagae (Kanazawa University)

Histogram の拡張には 2 つの方向が考えられる。1 つは、各ビン内の補助的な情報である局所モーメント情報を追加して用いる Polynomial Histogram 型であり、もう 1 つは Histogram を平滑化する Frequency Polygon 型及び Histospline 型である。本稿では、局所モーメント情報の利用と Histogram の平滑化を同時に満たす多項式型の平滑化 Polynomial Histogram 推定法を提案し、そのモデルが漸近的に推定量を改良し、漸近正規性を持つことを示す。数値実験により標本数に関わらず、従来型の主なビン型推定量と比較して推定精度が改良できることを示した。

Histogram can be extended in two directions. One is the Polynomial Histogram type that additionally uses local moment information as auxiliary information in each bins, and the other is the Frequency Polygon and Histospline types that smooth the Histogram. In this paper, we propose a smoothed Polynomial Histogram estimator that satisfies both the use of local moment information and the smoothing of the Histogram, and show that the model improves the estimator asymptotically and has asymptotic normality. Numerical experiments show that the estimation accuracy can be improved compared to the conventional principal binned estimators regardless of the sample size.

1 研究背景と目的

Histogram の拡張については、2 つに大別される。一つ目は、各ビンにおける平均や分散等の局所モーメント情報を利用する Polynomial Histogram(PH) 推定法である。Sagae and Scott(1997) と Scott and Sagae(1997) は高次までの局所モーメントを追加的に利用した PH 推定法を提案し、平均積分二乗誤差 (MISE) の意味で高次オーダーの収束性を持つことを示している。しかしながら、PH はビンごとに推定するため、各ビンの境界で連続性を持たない。もう一つは、各ビンの境界での不連続性を解消するように Histogram を平滑化するものである。本稿では、連続性とは累積分布関数の 2 次連続性を表している。Scott(1985) は各ビンの中点で線形補間する Frequency Polygon(FP) を提案し、その推定精度が $O(n^{-4/5})$ で、Histogram の $O(n^{-2/3})$ を改良することを示した。FP に関連した研究として、Minnotte(1996, 1998) の Bias-Optimized Frequency Polygon や、Jones et al.(1998) の Edge Frequency Polygon がある。その他に、ビンの端点での 2 次連続性を満たす方法として、Boneva, Kendall and Stefanov(BKS)(1971) と Schoenberg(1973) による Histospline がある。Lii and Rosenblatt(LR)(1974) は LR 型 Histospline の MISE 収束レートが $O(n^{-6/7})$ であることを示した。齊藤・寒河江 (2021) は BKS 型 Histospline と LR 型

Histospline の理論的同等性を示し、MISE の陽な漸近表現を導いている。局所モーメント情報の利用及び Histogram の平滑化の両方の性質を取り入れた推定モデルについては、齊藤・寒河江 (2022) が平滑化 Polynomial Histogram(S-PH) を提案している。1 次までの局所モーメント情報保持の条件と 2 次連続性の条件を同時に満たすことで、局所モーメント条件のみを用いた 1 次 PH 及び連続性条件のみを用いた Histospline を改良することを示している。

本稿では、2 次までの局所モーメント情報と 2 次連続性の条件を満たす S-PH を提案し、その理論的特性として MISE に関連した漸近的性質を導出し、有限標本における有効性を数値実験から明らかにする。

2 平滑化 Polynomial Histogram

2.1 S-PH 推定量の構築

本稿では、モーメント次数と連続性の次数に依存するため、提案モデルを $S\text{-PH}_{(p,q)}$ で表記する。ここで、 p は累積分布関数の連続性の次数、 q は局所モーメントの次数とする。これは、従来のビン型推定量を包括した表現であり、Histogram は $S\text{-PH}_{(0,0)}$ 、BFP は $S\text{-PH}_{(1,0)}$ 、Histospline は $S\text{-PH}_{(2,0)}$ 、2 次 PH は $S\text{-PH}_{(0,2)}$ に対応する。以降、本稿では累積分布関数の 2 次までの連続性条件と、局所 2 次までのモーメント条件を同時に満たす $S\text{-PH}_{(2,2)}$ の場合を扱う。

以降、簡単のために記法について説明する。標本数 n 、節点数 N 、ビン節点 x_j ($j = 0, 1, \dots, N$)、定義域 $[x_0, x_N]$ とする。 j 番目のビン $B_j = [x_{j-1}, x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, N$)、ビン幅 h 、ビンの中点 t_j 、各ビンの面積 $\mu_j^{(0)}$ 、局所 1 次モーメント $\mu_j^{(1)}$ 、局所 2 次モーメント $\mu_j^{(2)}$ 、 j 番目のビン B_j における $S\text{-PH}_{(2,2)}$ 推定量 $\hat{F}_j(x)$ 、 $S\text{-PH}_{(2,2)}$ 密度推定量 $\hat{f}_j(x) = \hat{F}'_j(x)$ 、 $\hat{f}_j(x)$ の係数 $a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, \dots, a_4^{(j)}$ とし、以降、 a_0, a_1, \dots, a_4 と略す。

この時、 $S\text{-PH}_{(2,2)}$ 密度推定量 $\hat{f}_j(x)$ は次の通りである；

$$\hat{f}_j(x) = a_0 Q_0(x) + a_1 Q_1(x) + a_2 Q_2(x) + a_3 Q_3(x) + a_4 Q_4(x), \quad x \in B_j, \quad (1)$$

ただし、 $Q_i(x)$, ($i = 0, 1, \dots$) は正規化したルジャンドル多項式で、 $j = 1, 2, \dots, N$ で次の通りである；

$$Q_0(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$Q_1(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{\sqrt{6}}{h} (x - t_j), \quad (3)$$

$$Q_2(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{\sqrt{10}}{4} \left\{ \frac{12}{h^2} (x - t_j)^2 - 1 \right\}, \quad (4)$$

$$Q_3(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{\sqrt{14}}{2} \left\{ \frac{20}{h^3} (x - t_j)^3 - \frac{3}{h} (x - t_j) \right\}, \quad (5)$$

$$Q_4(x) = \sqrt{\frac{2}{h}} \frac{3\sqrt{2}}{16} \left\{ \frac{560}{h^4} (x - t_j)^4 - \frac{120}{h^2} (x - t_j)^2 + 3 \right\}. \quad (6)$$

から十分に離れたビンでの要素とすると、

$$M_j = \frac{3}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\}, \quad (13)$$

ただし、 $w_{j,k} = \frac{\sqrt{15}}{3} (\sqrt{15} - 4)^{|j-k|}$ 、 $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\sqrt{15}}{3} (\sqrt{15} - 4)^{|j-k|} = 1$ である。したがって、S-PH_(2,2) の密度推定量 $\hat{f}_j(x)$ は次式で与えられる；

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(x) = & \sqrt{\frac{2}{h}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} Q_0(x) - \frac{\sqrt{10}}{4} Q_2(x) + \frac{\sqrt{2}}{8} Q_4(x) \right) \mu_j^{(0)} \right. \\ & + \left(\frac{\sqrt{6}}{h} Q_1(x) - \frac{1}{\sqrt{14}h} Q_3(x) \right) \mu_j^{(1)} + \left(\frac{3\sqrt{10}}{h^2} Q_2(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2h^2} Q_4(x) \right) \mu_j^{(2)} \\ & + \left(\frac{\sqrt{14}}{112} Q_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{80} Q_4(x) \right) \\ & \quad \times \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \\ & + \left(\frac{\sqrt{14}}{112} Q_3(x) - \frac{\sqrt{2}}{80} Q_4(x) \right) \\ & \quad \times \left. \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

2.2 漸近的性質

本節ではビンごとに推定された $\hat{f}_j(x)$ で構成された S-PH_(2,2) 密度推定量の漸近的 MISE を導き、漸近正規性が成り立つことを示す。

S-PH_(2,2) 密度推定量に関して次の正則条件を満たすものとする；

- (i) ビン幅 h について、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $h \rightarrow 0$ かつ $nh \rightarrow \infty$,
- (ii) 関数 $f^{(5)}(x)$ は絶対連続関数で、 $R(f^{(6)}) = \int f^{(6)}(x)^2 dx < \infty$.

この (i) と (ii) の条件のもとで、以下の S-PH_(2,2) 推定量の漸近分散、漸近バイアス、漸近的な MISE と漸近正規性を以下の定理及び系にまとめる。

Theorem 1 : S-PH_(2,2) の IV $\{\hat{f}_j(x)\}$

ビン B_j における S-PH_(2,2) 密度推定量の IV $\{\hat{f}_j(x)\}$ は、

$$\text{IV} \left\{ \hat{f}_j(x) \right\} = \sum_{i=0}^4 \text{Var}(c_i), \quad (15)$$

ただし、 c_i , ($i = 0, 1, \dots, 4$) は (14) 式について $Q_i(x)$ で整理した時の係数であり、詳しくは Appendix 1 の (26)~(30) に対応している。

Theorem 2 : S-PH_(2,2) の Bias $\{\hat{f}_j(x)\}$ 及び ISB $\{\hat{f}_j(x)\}$

ビン B_j における S-PH_(2,2) 密度推定量の Bias $\{\hat{f}_j(x)\}$ 及び ISB $\{\hat{f}_j(x)\}$ は、

$$\text{Bias}\{\hat{f}_j(x)\} = h^6 f^{(5)}(x) \left(-\frac{1}{332640} \sqrt{\frac{11}{h}} Q_5(x) + \frac{1}{211680} \sqrt{\frac{7}{h}} Q_3(x) \right), \quad (16)$$

$$\text{ISB}\{\hat{f}_j(x)\} = \left\{ 11 \left(-\frac{1}{332640} \right)^2 + 7 \left(\frac{1}{211680} \right)^2 \right\} h^{11} f^{(5)}(x)^2. \quad (17)$$

Theorem 3 : S-PH_(2,2) の AMISE

S-PH_(2,2) 密度推定量 $\hat{f}(x)$ の漸近的な MISE(AMISE) は、

$$\begin{aligned} \text{AMISE}\{\hat{f}(x)\} &= \left(\frac{13425 + 2558\sqrt{15}}{6300} \right) \frac{1}{nh} + \frac{h^{10}}{3911846400} R(f^{(5)}) \\ &\doteq \frac{3.703}{nh} + \frac{h^{10}}{3911846400} R(f^{(5)}). \end{aligned} \quad (18)$$

このときの最適ビン幅 h^* 及び最小 AMISE は、

$$h^* = \left\{ \frac{310464(13425 + 2558\sqrt{15})}{5} \right\}^{\frac{1}{11}} R(f^{(5)})^{-\frac{1}{11}} n^{-\frac{1}{11}}, \quad (19)$$

$$\text{最小 AMISE} = \frac{11}{10} \left(\frac{13425 + 2558\sqrt{15}}{6300} \right)^{\frac{10}{11}} \left(\frac{R(f^{(5)})}{391184640} \right)^{\frac{1}{11}} n^{-\frac{10}{11}}. \quad (20)$$

Theorem 4 : S-PH_(2,2) の漸近正規性

S-PH_(2,2) 密度推定量について、

$$\frac{\sum_{m=1}^n E|Z_m - E[Z_m]|^3}{\sigma[\hat{f}_j(x)]^3} = \frac{O\left(\frac{1}{n^2 h^2}\right)}{O\left(\frac{1}{n^{3/2} h^{3/2}}\right)} = O\left(\frac{1}{n^{1/2} h^{1/2}}\right) = o(1), \quad (21)$$

ただし、 $\sigma[\hat{f}_j(x)]^2 = \text{Var}\{\hat{f}_j(x)\}$ で、 Z_m ($m = 1, 2, \dots, n$) は $\hat{f}_j(x)$ に従う独立な確率変数である。したがって、リアプノフの条件を満たすことから漸近正規性が成り立つ。

Corollary 1 : 各ビンにおける S-PH_(2,2) の漸近正規性

$h \propto O(n^{-\alpha})$, $x \in B_j$ に対して、

$\alpha = \frac{1}{11}$ のとき、

$$\sqrt{nh} \left\{ \hat{f}_j(x) - f(x) \right\} \xrightarrow{d} N \left(\text{Bias}[\hat{f}_j(x)], \left(\frac{13425 + 2558\sqrt{15}}{6300} \right) f(\xi_j) \right), \quad (22)$$

$\alpha > \frac{1}{11}$ のとき、

$$\sqrt{nh} \left\{ \hat{f}_j(x) - f(x) \right\} \xrightarrow{d} N \left(o(1), \left(\frac{13425 + 2558\sqrt{15}}{6300} \right) f(\xi_j) \right), \quad (23)$$

が漸近的に成り立つ。ただし、 $f(\xi_j)$ は $p_j = \int_{B_j} f(t)dt = hf(\xi_j)$, $\xi_j \in B_j$ を満たす B_j 内のある点とする。Theorem1~3 の S-PH_(2,2) の IV、Bias、ISB、AMISE 及び Theorem 4 の漸近正規性の証明については Appendix1, 2 で詳述する。

3 数値実験

S-PH_(2,2) の有限標本における推定精度を調べるため、積分二乗誤差 (ISE) について数値実験を行う。定義域 $[-6, 6]$ の混合正規分布 $f(x)$ は $\frac{4}{5}N(-2, 2^2) + \frac{1}{5}N(4, 1.5^2)$ に従う確率密度関数とし、標本数を $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$ とする。ビン幅は理論上の最適ビン幅を用いて、各標本数における ISE の数値実験 1000 回の平均 (MISE) と標準偏差を算出する。同様の設定の下での Histogram、Histospline、2次 PH、S-PH_(2,1) と比較する。

数値実験に用いる各推定量の最適ビン幅 h^* は次の通りである。

表 1 各推定量の最適ビン幅

Histogram	$h_{HIST}^* = \left(\frac{6}{R(f^{(1)})} \right)^{\frac{1}{3}} n^{-\frac{1}{3}}$
Histospline	$h_{HSP}^* = \left(\frac{2520\sqrt{3}+1512}{R(f^{(3)})} \right)^{\frac{1}{7}} n^{-\frac{1}{7}}$
2次 PH	$h_{PH(2)}^* = \left(\frac{50400}{R(f^{(3)})} \right)^{\frac{1}{7}} n^{-\frac{1}{7}}$
S-PH _(2,1)	$h_{S-PH(2,1)}^* = \left(\frac{125100\sqrt{2}+178560}{R(f^{(4)})} \right)^{\frac{1}{9}} n^{-\frac{1}{9}}$
S-PH _(2,2)	$h_{S-PH(2,2)}^* = \left\{ \frac{310464(13425+2558\sqrt{15})}{5R(f^{(5)})} \right\}^{\frac{1}{11}} n^{-\frac{1}{11}}$

図 1 は $n = 10^2$ の時の Histogram、Histospline、2次 PH と本稿で提案した S-PH_(2,2) の数値実験結果の例で、実線が推定結果、破線が真の密度関数である。

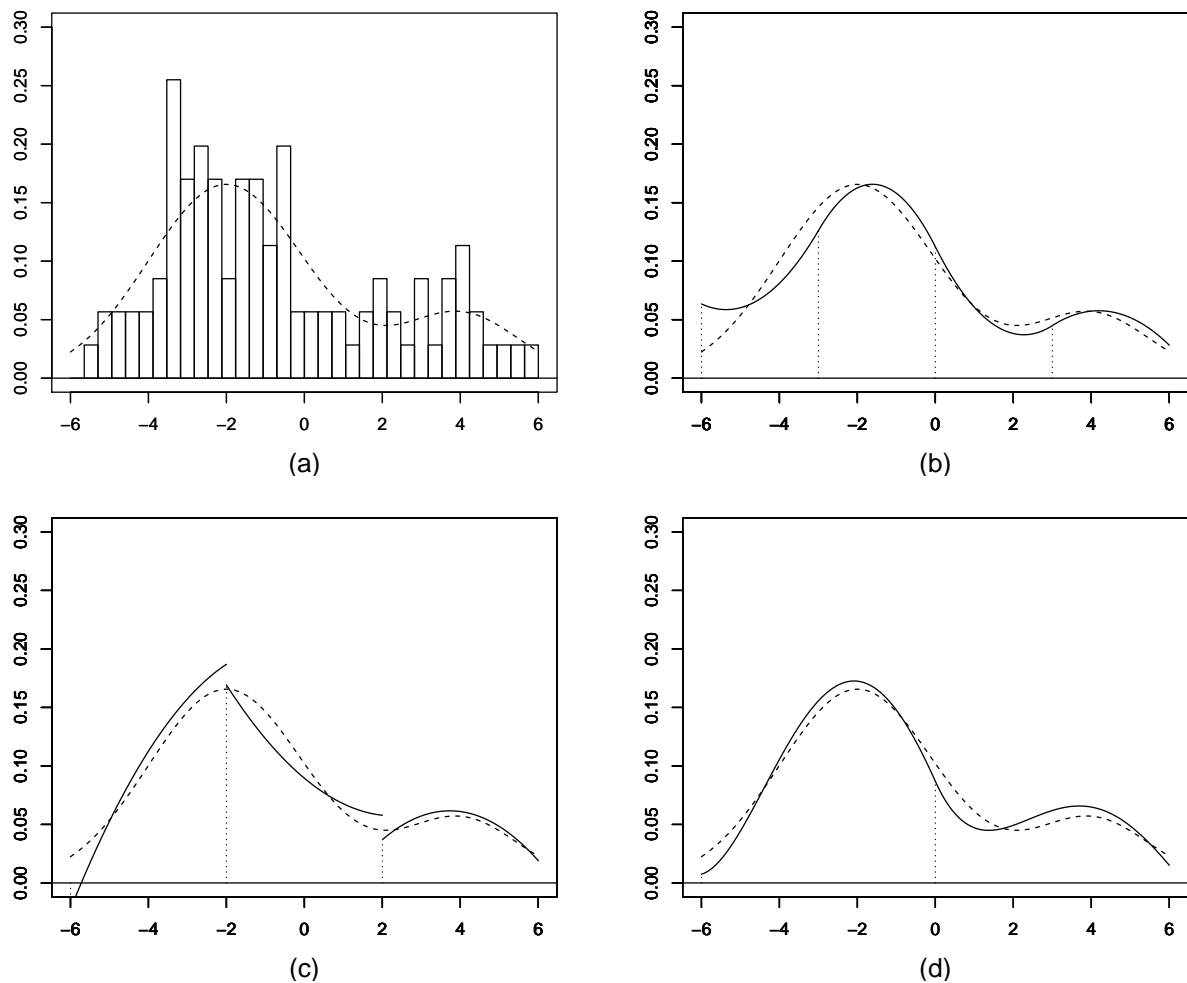


図1 $n = 10^2$ での推定例

(実線が推定結果、破線が真の分布。(a)Histogram、(b)Histospline、(c)2次 PH、(d)S-PH_(2,2))

表2 主な4つの推定量と S-PH_(2,2) の MISE 比較 (繰返し回数 1000 回)

	MISE*	$n = 10^2$	$n = 10^3$	$n = 10^4$	$n = 10^5$
Histogram	$O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)$	0.02708	0.00602	0.00136	0.00033
Histospline	$O\left(n^{-\frac{6}{7}}\right)$	0.00466	0.00075	0.00018	0.00009
2次 PH	$O\left(n^{-\frac{6}{7}}\right)$	0.00674	0.00095	0.00019	<u>0.00007</u>
S-PH _(2,1)	$O\left(n^{-\frac{8}{9}}\right)$	0.00457	0.00074	0.00017	<u>0.00007</u>
S-PH _(2,2)	$O\left(n^{-\frac{10}{11}}\right)$	<u>0.00437</u>	<u>0.00055</u>	<u>0.00015</u>	0.00008

表 2 はデータ数 n を変化させた時、5 つの推定法を比較した MISE の実験結果である。各 n ごとに比較して最小の値に下線を引いてある。どの推定量も標本数が大きくなるにつれて ISE は小さくなる。標本数が $n = 10^2 \sim 4$ の時に、S-PH_(2,2) の ISE が最も小さい。 $n = 10^5$ の時、Histogram 以外の推定法の優劣はほとんどない。

表 3 データ数 n と最適ビン数の比較

	MISE*	$n = 10^2$	$n = 10^3$	$n = 10^4$	$n = 10^5$
Histogram	$O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)$	34	73	158	341
Histospline	$O\left(n^{-\frac{6}{7}}\right)$	4	6	9	12
2 次 PH	$O\left(n^{-\frac{6}{7}}\right)$	3	4	6	9
S-PH _(2,1)	$O\left(n^{-\frac{8}{9}}\right)$	3	4	6	7
S-PH _(2,2)	$O\left(n^{-\frac{10}{11}}\right)$	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>
5 次 Kernel	$O\left(n^{-\frac{10}{11}}\right)$	10^2	10^3	10^4	10^5

表 3 は標本数 $n = 10^2 \sim 5$ と変化させたときの Histogram、2 次 PH、Histospline、S-PH_(2,1)、S-PH_(2,2)、5 次 Kernel 推定のビン数である。ただし、5 次 Kernel は各データ点で推定するため、データ数をビン数に対応させている。 n を変化させた時の最小の値に下線を引いてある。標本数に関わらず S-PH_(2,2) のビン数が他の推定法と比較して最も小さい。例えば、 $n = 10^5$ では Histogram の約 1/85、5 次 Kernel 推定の 1/25000 のビン数である。すなわち、S-PH_(2,2) は他の推定法と比較して最も少ないビン数で推定できることが分かる。

表 4 主な 4 つの推定量と S-PH_(2,2) の ISE 標準偏差比較 (繰返し回数 1000 回)

	MISE*	$n = 10^2$	$n = 10^3$	$n = 10^4$	$n = 10^5$
Histogram	$O\left(n^{-\frac{2}{3}}\right)$	0.007364	0.001127	0.000169	0.000028
Histospline	$O\left(n^{-\frac{6}{7}}\right)$	<u>0.002467</u>	0.000367	0.000059	<u>0.000013</u>
2 次 PH	$O\left(n^{-\frac{6}{7}}\right)$	0.003837	0.000423	0.000064	<u>0.000013</u>
S-PH _(2,1)	$O\left(n^{-\frac{8}{9}}\right)$	0.003429	0.000436	0.000063	<u>0.000013</u>
S-PH _(2,2)	$O\left(n^{-\frac{10}{11}}\right)$	0.003117	<u>0.000348</u>	<u>0.000058</u>	<u>0.000013</u>

表 4 はデータ数 n を変化させた時の 5 つの推定法の安定性について、ISE の標準偏差を比較した実験結果である。各 n ごとに比較して最小の値に下線を引いてある。どの推定量も標本数が大きくなるにつれて ISE の標準偏差は小さくなる。 $n = 10^3$ 以上では、S-PH_(2,2) の ISE に対応した

標準偏差が最も小さく、安定した推定法であることが分かる。

以上から、表 2 と表 4 より n が大きくなるにつれて誤差が小さくなる一致性の裏付けとともに、本稿で提案した S-PH_(2,2) は総じて理論的に優れていることが数値実験においても裏付けられ、ビン幅が大きい特性から安定性が得られている。

4 結論と考察

本稿では、Histogram の拡張として、2 次までの局所モーメント情報と各ビンの境界での 2 次連続性の条件を同時に満たす平滑化 Polynomial Histogram(S-PH) 推定量を提案した。また、その理論的側面については漸近的性質を導出し、数値実験を行い、理論と実証の両面において提案モデルの有効性を示した。

漸近的性質に関して、S-PH_(2,2) 密度推定量の MISE 収束オーダーが $O(n^{-10/11})$ であることを示した。従来の主なビン型推定法と推定精度を比較すると、Histogram の $O(n^{-2/3})$ 、局所モーメントの条件のみを満たす 2 次 PH の $O(n^{-6/7})$ 、2 次連続性の条件のみを満たす Histospline の $O(n^{-6/7})$ 、2 次連続性条件と 1 次までの局所モーメント条件を同時に満たす S-PH_(2,1) の $O(n^{-8/9})$ を改良している。カーネル密度推定との関係では、S-PH_(2,2) の MISE 収束オーダーは 5 次の高次カーネル関数に相当する。また、S-PH_(2,2) は漸近正規性が成り立つことを示し、その陽な表現を導出した。本稿では推定量の基底を正規化したルジャンドル直交多項式とし、その正規性及び直交性を利用することで S-PH_(2,2) 密度推定量の IV と ISB の導出が容易になることを示した。

有限標本における特性を調べるため、二山の分布を例として ISE の標本平均 (MISE) と標準偏差についての数値実験を行った。その結果、データ数が $10^2 \sim 10^4$ の場合で、S-PH_(2,2) の MISE が Histogram、Histospline、2 次 PH、S-PH_(2,1) より小さく、良い推定結果を示した。各推定量の最適ビン数に注目すると、データ数が 10^5 の時、今回の実験における S-PH_(2,2) のビン数は Histogram の約 1/85、5 次 Kernel 推定の 1/25000 である。このことは、S-PH_(2,2) が最も少ないビン数で、より優れた推定精度を得ることができ、大規模データの縮約に対して有効的な手法であることを示唆している。

Appendix 1 : AMISE $\{\hat{f}(x)\}$ の証明

MISE の定義は次の通りである。

$$\begin{aligned} \text{MISE} &:= E[\text{ISE}] \\ &= E\left\{\int [\hat{f}(t) - f(t)]^2 dt\right\} = \int E[\hat{f}(t) - f(t)]^2 dt \\ &= \text{IV}[\hat{f}(t)] + \text{ISB}[\hat{f}(t)], \end{aligned}$$

ただし、IV と ISB は次のように定義される。

$$\begin{aligned}\text{IV} [\hat{f}(t)] &= \int \text{Var} [\hat{f}(t)] dt, \\ \text{ISB} [\hat{f}(t)] &= \int \text{Bias} [\hat{f}(t)]^2 dt.\end{aligned}$$

AMISE $\{\hat{f}(x)\}$ について漸近積分分散 AIV $\{\hat{f}(x)\}$ と漸近積分二乗バイアス AISB $\{\hat{f}(x)\}$ のそれぞれから導出する。

まずビン B_j における AIV $\{\hat{f}_j(x)\}$ について示す。S-PH $_{(2,2)}$ の密度推定量は (14) 式より、

$$\begin{aligned}\hat{f}_j(x) &= \sqrt{\frac{2}{h}} \left(\frac{\mu_j^{(0)}}{\sqrt{2}} Q_0(x) + \frac{\sqrt{6}}{h} \mu_j^{(1)} Q_1(x) + \left(-\frac{\sqrt{10}}{4} \mu_j^{(0)} + \frac{3\sqrt{10}}{h^2} \mu_j^{(2)} \right) Q_2(x) \right. \\ &\quad + \left[-\frac{\mu_j^{(1)}}{\sqrt{14}h} + \frac{\sqrt{14}}{112} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sqrt{14}}{112} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right] Q_3(x) \right. \\ &\quad + \left[\frac{\sqrt{2}}{8} \mu_j^{(0)} - \frac{3\sqrt{2}}{2h^2} \mu_j^{(2)} \right. \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{80} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \\ &\quad \left. \left. - \frac{\sqrt{2}}{80} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right] Q_4(x) \right). \tag{24}\end{aligned}$$

(24) より、IV $\{\hat{f}_j(x)\}$ は以下の通り表現される；

$$\text{IV} \{\hat{f}_j(x)\} = \sum_{i=0}^4 \text{Var}(c_i) \int_{B_j} Q_i(x)^2 dx + \sum_{i \neq l}^4 \text{Cov}(c_i, c_l) \int_{B_j} Q_i(x) Q_l(x) dx, \tag{25}$$

ただし、

$$c_0 = \frac{\mu_j^{(0)}}{\sqrt{h}}, \quad (26)$$

$$c_1 = \frac{2\sqrt{3}}{h^{3/2}}\mu_j^{(1)}, \quad (27)$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{2}{h}} \left(-\frac{\sqrt{10}}{4}\mu_j^{(0)} + \frac{3\sqrt{10}}{h^2}\mu_j^{(2)} \right), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} c_3 = & \sqrt{\frac{2}{h}} \left[-\frac{\mu_j^{(1)}}{\sqrt{14}h} \right. \\ & + \frac{\sqrt{14}}{112} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \\ & \left. + \frac{\sqrt{14}}{112} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right], \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 = & \sqrt{\frac{2}{h}} \left[-\frac{\mu_j^{(1)}}{\sqrt{14}h} \right. \\ & + \frac{\sqrt{2}}{80} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \\ & \left. + \frac{\sqrt{2}}{80} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

(25) 式の第 1 項について、正規性から $\int_{B_j} Q_i(x)^2 dx = 1$ となる。第 2 項について、共分散行列の非対角成分要素が直交性から 0 となる。そのため、(25) 式の第 1 項のみ評価すればよい。以降での分散の評価では、主要項のみ取り出して記述する。

(25) の第 1 項は、各ビンの度数を ν_j , ($j = 1, 2, \dots, N$) とし、 $\mu_j^{(0)} = \frac{\nu_j}{n}$ を用いると、近似的に、

$$\begin{aligned} \text{Var}(c_0 Q_0(x)) &= \text{Var} \left(\frac{\mu_j^{(0)}}{\sqrt{h}} Q_0(x) \right) \\ &= \frac{Q_0(x)^2}{n^2 h} \text{Var}(\nu_j^{(0)}) \\ &= \frac{Q_0(x)^2}{n^2 h} n p_j (1 - p_j) \\ &\sim \frac{1}{n} f(x) Q_0(x)^2. \quad (31) \end{aligned}$$

(25) の第 2 項は、同様にして、

$$\begin{aligned}
\text{Var}(c_1 Q_1(x)) &= \text{Var}\left(\frac{2\sqrt{3}}{h^{3/2}} \mu_j^{(1)} Q_1(x)\right) \\
&= \frac{12}{h^3} Q_1(x)^2 \text{Var}\left(\mu_j^{(1)}\right) \\
&\sim \frac{1}{n} f(x) Q_1(x)^2.
\end{aligned} \tag{32}$$

(25) の第 3 項は、同様にして、

$$\begin{aligned}
\text{Var}(c_2 Q_2(x)) &= \text{Var}\left\{\sqrt{\frac{2}{h}} \left(-\frac{\sqrt{10}}{4} \mu_j^{(0)} + \frac{3\sqrt{10}}{h^2} \mu_j^{(2)}\right) Q_2(x)\right\} \\
&= \frac{2}{h} Q_2(x)^2 \left\{\frac{5}{8n^2} \text{Var}(\nu_j) + \frac{90}{h^2} \text{Var}\left(\mu_j^{(2)}\right) - \frac{15}{h^2} \text{Cov}\left(\mu_j^{(0)}, \mu_j^{(2)}\right)\right\} \\
&\sim \frac{2}{h} Q_2(x)^2 \left(\frac{5h}{8n} f(x) + \frac{9h}{8n} f(x) - \frac{5h}{4n} f(x)\right) \\
&= \frac{1}{n} f(x) Q_2(x)^2.
\end{aligned} \tag{33}$$

(25) の第 4 項は、 $\sum_{k=1}^{N-2} w_{j,k} w_{j,k+1} = \sum_{k=1}^{N-2} w_{j-1,k} w_{j-1,k+1} = -\frac{\sqrt{15}}{9}$, $\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 = \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 = \frac{4\sqrt{15}}{9}$, $\sum_{k=1}^{N-2} w_{j,k} w_{j-1,k+1} = \frac{450-116\sqrt{15}}{9}$ を用いて、同様にして、

$$\begin{aligned}
& \text{Var}(c_3 Q_3(x)) \\
&= \text{Var}\left(\sqrt{\frac{2}{h}}\left[-\frac{\mu_j^{(1)}}{\sqrt{14}h} + \frac{\sqrt{14}}{112} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{-\frac{3}{2}(\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h}(\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2}(\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right\}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \frac{\sqrt{14}}{112} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{-\frac{3}{2}(\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h}(\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2}(\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right\}\right]\right) Q_3(x) \\
&\sim \frac{2}{h} Q_3(x)^2 \left\{ \frac{1}{14h^2} \text{Var}(\mu_j^{(1)}) + \frac{9}{3584} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)})\right) \right. \\
&\quad + \frac{25}{224h^2} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)})\right) + \frac{63}{32h^4} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad + \frac{9}{3584} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)})\right) + \frac{25}{224h^2} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)})\right) \\
&\quad + \frac{63}{32h^4} \text{Var}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad - \frac{9}{64h^2} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad - \frac{9}{64h^2} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad + \frac{9}{1792} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)})\right) \\
&\quad + \frac{25}{112h^2} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)})\right) \\
&\quad + \frac{63}{16h^4} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad - \frac{9}{64h^2} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad - \frac{9}{64h^2} \text{Cov}\left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right) \\
&\quad \left. + \frac{5}{28h^2} \text{Cov}\left(\mu_j^{(1)}, \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)})\right) + \frac{5}{28h^2} \text{Cov}\left(\mu_j^{(1)}, \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} (\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)})\right) \right\} \\
&\sim \left(\frac{113\sqrt{15} - 306}{336}\right) \frac{1}{n} f(x) Q_3(x)^2. \tag{34}
\end{aligned}$$

(25) の第 5 項は、(34) 式と同様にして、

$$\begin{aligned}
& \text{Var}(c_4 Q_4(x)) \\
&= \text{Var}\left(\sqrt{\frac{2}{h}}\left[-\frac{\mu_j^{(1)}}{\sqrt{14}h} + \frac{\sqrt{2}}{80} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{-\frac{3}{2}(\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h}(\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2}(\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right\}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ \frac{\sqrt{2}}{80} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{-\frac{3}{2}(\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h}(\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2}(\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)})\right\}\right] Q_4(x)\right) \\
&\sim \left(\frac{150 + 251\sqrt{15}}{3600}\right) \frac{1}{n} f(x) Q_4(x)^2. \tag{35}
\end{aligned}$$

以上の (31) ~ (35) より、ビン B_j における漸近積分分散 $\text{AIV}\{\hat{f}_j(x)\}$ は、

$$\begin{aligned}
\text{AIV}\{\hat{f}_j(x)\} &= \left(\int_{B_j} Q_0(x)^2 dx + \int_{B_j} Q_1(x)^2 dx + \int_{B_j} Q_2(x)^2 dx\right. \\
&\quad \left.+ \frac{113\sqrt{15} - 306}{336} \int_{B_j} Q_3(x)^2 dx + \frac{251\sqrt{15} + 150}{3600} \int_{B_j} Q_4(x)^2 dx\right) \frac{1}{n} f(x) \\
&= \left(\frac{2558\sqrt{15} + 13425}{6300}\right) \frac{1}{n} f(x). \tag{36}
\end{aligned}$$

したがって、全体での $\text{AIV}\{\hat{f}(x)\}$ はリーマン積分近似 $\sum_j f(\xi_j)h = [\int f(x)dx + o(1)]$ より、

$$\text{AIV}\{\hat{f}(x)\} = \left(\frac{2558\sqrt{15} + 13425}{6300}\right) \frac{1}{nh}. \tag{37}$$

次に、漸近積分二乗バイアスについて示す。(24) を整理し直すと、

$$\begin{aligned}
\hat{f}_j(x) &= \sqrt{\frac{2}{h}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}} Q_0(x) - \frac{\sqrt{10}}{4} Q_2(x) + \frac{\sqrt{2}}{8} Q_4(x) \right) \mu_j^{(0)} \right. \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{6}}{h} Q_1(x) - \frac{1}{\sqrt{14}h} Q_3(x) \right) \mu_j^{(1)} + \left(\frac{3\sqrt{10}}{h^2} Q_2(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2h^2} Q_4(x) \right) \mu_j^{(2)} \\
&\quad + \left(\frac{\sqrt{14}}{112} Q_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{80} Q_4(x) \right) \\
&\quad \times \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2}(\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h}(\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2}(\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \\
&\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{14}}{112} Q_3(x) - \frac{\sqrt{2}}{80} Q_4(x) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2}(\mu_{k+1}^{(0)} - \mu_k^{(0)}) - \frac{10}{h}(\mu_{k+1}^{(1)} + \mu_k^{(1)}) + \frac{42}{h^2}(\mu_{k+1}^{(2)} - \mu_k^{(2)}) \right\} \right]. \tag{38}
\end{aligned}$$

(38) 式の期待値を取ると、

$$\begin{aligned}
E \left[\hat{f}_j(x) \right] &= \sqrt{\frac{2}{h}} \left[\gamma_0 E \left[\mu_j^{(0)} \right] + \gamma_1 E \left[\mu_j^{(1)} \right] + \gamma_2 E \left[\mu_j^{(2)} \right] \right. \\
&\quad + \gamma_3 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ -\frac{3}{2} \left(E \left[\mu_{k+1}^{(0)} \right] - E \left[\mu_k^{(0)} \right] \right) - \frac{10}{h} \left(E \left[\mu_{k+1}^{(1)} \right] + E \left[\mu_k^{(1)} \right] \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{42}{h^2} \left(E \left[\mu_{k+1}^{(2)} \right] - E \left[\mu_k^{(2)} \right] \right) \right\} \right. \\
&\quad + \gamma_4 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left\{ -\frac{3}{2} \left(E \left[\mu_{k+1}^{(0)} \right] - E \left[\mu_k^{(0)} \right] \right) - \frac{10}{h} \left(E \left[\mu_{k+1}^{(1)} \right] + E \left[\mu_k^{(1)} \right] \right) \right. \\
&\quad \quad \quad \left. \left. + \frac{42}{h^2} \left(E \left[\mu_{k+1}^{(2)} \right] - E \left[\mu_k^{(2)} \right] \right) \right\} \right], \tag{39}
\end{aligned}$$

ただし、

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} Q_0(x) - \frac{\sqrt{10}}{4} Q_2(x) + \frac{\sqrt{2}}{8} Q_4(x), \tag{40}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{6}}{h} Q_1(x) - \frac{1}{\sqrt{14}h}, \tag{41}$$

$$\gamma_2 = \frac{3\sqrt{10}}{h^2} Q_2(x) - \frac{3\sqrt{2}}{2h^2} Q_4(x), \tag{42}$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{14}}{112} Q_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{80} Q_4(x), \tag{43}$$

$$\gamma_4 = \frac{\sqrt{14}}{112} Q_3(x) - \frac{\sqrt{2}}{80} Q_4(x). \tag{44}$$

$\nu_k \sim B(n, p_k)$, ($k = 1, 2, \dots, j-1, j, \dots, n$) で、 $p_k = \int_{B_k} f(t) dt$ の時、

$$E \left[\mu_k^{(0)} \right] = \frac{1}{n} E \left[\nu_k \right] = \frac{1}{n} n p_k = \int_{B_k} f(t) dt, \tag{45}$$

$$E \left[\mu_k^{(1)} \right] = \int_{B_k} (t - t_k) f(t) dt, \tag{46}$$

$$E \left[\mu_k^{(2)} \right] = \int_{B_k} (t - t_k)^2 f(t) dt, \tag{47}$$

ここで、未知の $f(t)$ についてテイラー級数による近似から以下の通り表せられる；

$$\begin{aligned}
\int_{B_k} f(t) dt &\sim \int_{B_k} \left\{ f(x) + (t-x) f^{(1)}(x) + \frac{1}{2!} (t-x)^2 f^{(2)}(x) + \frac{1}{3!} (t-x)^3 f^{(3)}(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4!} (t-x)^4 f^{(4)}(x) + \frac{1}{5!} (t-x)^5 f^{(5)}(x) + \dots \right\} dt. \tag{48}
\end{aligned}$$

(39) 式で (40)~(48) を用いて、 $\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} k = j$, $\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} k^2 = j^2 - \frac{1}{5}$, $\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} k^3 =$

$j^3 - \frac{3}{5}j$, $\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} k^4 = j^4 - \frac{6}{5}j^2 + \frac{1}{25}$ であることを利用して整理すると、 $\hat{f}_j(x)$ のバイアスは

$$\begin{aligned} \text{Bias} [\hat{f}_j(x)] &= E [\hat{f}_j(x)] - f(x) \\ &= h^6 f^{(5)}(x) \left(-\frac{1}{332640} \sqrt{\frac{11}{h}} Q_5(x) + \frac{1}{211680} \sqrt{\frac{7}{h}} Q_3(x) \right). \end{aligned} \quad (49)$$

したがって、ビン B_j における AISB $\{\hat{f}_j(x)\}$ は、

$$\begin{aligned} \text{AISB} \{\hat{f}_j(x)\} &= h^{12} f^{(5)}(x)^2 \left\{ \left(\frac{1}{332640} \right)^2 \frac{11}{h} \int_{B_j} Q_5(x)^2 dx + \left(\frac{1}{211680} \right)^2 \frac{7}{h} \int_{B_j} Q_3(x)^2 dx \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{1}{332640} \sqrt{\frac{11}{h}} \right) \left(\frac{1}{211680} \sqrt{\frac{7}{h}} \right) \int_{B_j} Q_5(x) Q_3(x) dx \right\} \\ &= \frac{h^{11}}{3911846400} f^{(5)}(x)^2. \end{aligned} \quad (50)$$

以上より、全体での AISB $\{\hat{f}(x)\}$ はリーマン積分近似 $\sum_j f^{(5)}(\xi_j)^2 h = [\int f^{(5)}(x)^2 dx + o(1)]$ を用いて、

$$\text{AISB} \{\hat{f}(x)\} = \frac{R(f^{(5)})}{3911846400} h^{10}. \quad (51)$$

Appendix 2 : $\hat{f}_j(x)$ の漸近正規性の証明

節点 $x_k = \frac{k}{N}$, $k = 1, 2, \dots, N$ として、度数 ν_k を定義関数 $I(\cdot)$ を用いて表記すると、

$$\nu_k = \sum_{m=1}^n I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right), \quad (52)$$

ただし、

$$I_m(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \leq X_m \leq v \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (53)$$

各ビンの局所 1 次モーメント $S_k^{(1)}$ 、局所 2 次モーメント $S_k^{(2)}$ を定義関数 $I(\cdot)$ を用いて表記すると、

$$S_k^{(1)} = \frac{1}{\nu_k} \sum_{m=1}^n (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right), \quad (54)$$

$$S_k^{(2)} = \frac{1}{\nu_k} \sum_{m=1}^n (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right), \quad (55)$$

ただし、 $I_m(u, v)$ は (53) と同様で、 $x_m (m = 1, 2, \dots, n)$ はデータ点である。

(38) を (52), (54), (55) を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned}
\hat{f}_j(x) = & \sqrt{\frac{2}{h}} \left(\frac{\gamma_0}{n} \sum_{m=1}^n I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) + \frac{\gamma_1}{n} \sum_{m=1}^n (x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right. \\
& + \frac{\gamma_2}{n} \sum_{m=1}^n (x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \\
& + \frac{\gamma_3}{n} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left[-\frac{3}{2} \left\{ \sum_{m=1}^n I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - \sum_{m=1}^n I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \right. \\
& - \frac{10}{h} \left\{ \sum_{m=1}^n (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + \sum_{m=1}^n (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \\
& + \frac{42}{h^2} \left\{ \sum_{m=1}^n (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - \sum_{m=1}^n (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \left. \right] \\
& + \frac{\gamma_4}{n} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left[-\frac{3}{2} \left\{ \sum_{m=1}^n I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - \sum_{m=1}^n I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \right. \\
& - \frac{10}{h} \left\{ \sum_{m=1}^n (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + \sum_{m=1}^n (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \\
& + \frac{42}{h^2} \left\{ \sum_{m=1}^n (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - \sum_{m=1}^n (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \left. \right] \Bigg), \quad (56)
\end{aligned}$$

ただし、 $\gamma_0, \dots, \gamma_4$ について $x - t_j \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ より、有限な値を取る。

(56) より、

$$\begin{aligned}
Z_m = & \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2}{h}} \left(\gamma_0 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) + \gamma_1 (x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right. \\
& + \gamma_2 (x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \\
& + \gamma_3 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left[-\frac{3}{2} \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \right. \\
& - \frac{10}{h} \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \\
& + \frac{42}{h^2} \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \left. \right] \\
& + \gamma_4 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k} \left[-\frac{3}{2} \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \right. \\
& - \frac{10}{h} \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \\
& + \frac{42}{h^2} \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \left. \right] \Bigg). \quad (57)
\end{aligned}$$

このとき、

$$\hat{f}_j(x) \simeq \sum_{m=1}^n Z_m, \quad (58)$$

で、 Z_m は独立同一分布に従う。

ここで、

$$E|Z_m - E[Z_m]|^3 \leq E|Z_m|^3 + 3E[Z_m^2] |E[Z_m]| + 4|E[Z_m]|^3. \quad (59)$$

Z_m^2 についてシュワルツの不等式より、

$$\begin{aligned} Z_m^2 \leq & \frac{18}{n^2 h} \left[\gamma_0^2 \left\{ I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 + \gamma_1^2 \left\{ (x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right. \\ & + \gamma_2^2 \left\{ (x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \\ & + \frac{9\gamma_3^2}{4} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \\ & + \frac{100\gamma_3^2}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \\ & + \frac{1764\gamma_3^2}{h^4} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \\ & + \frac{9\gamma_4^2}{4} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \\ & + \frac{100\gamma_4^2}{h^2} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \\ & \left. + \frac{1764\gamma_4^2}{h^4} \sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

(60) について期待値を取ると、

$$\begin{aligned}
E[Z_m^2] &\leq \frac{18}{n^2 h} \left(\gamma_0^2 E \left[\left\{ I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] + \gamma_1^2 E \left[\left\{ (x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] \right. \\
&\quad + \gamma_2^2 E \left[\left\{ (x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{9\gamma_3^2}{4} E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{100\gamma_3^2}{h^2} E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{1764\gamma_3^2}{h^4} E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{9\gamma_4^2}{4} E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad + \frac{100\gamma_4^2}{h^2} E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\quad \left. + \frac{1764\gamma_4^2}{h^4} E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \right). \tag{61}
\end{aligned}$$

(61) の大カッコ内の第 1 項目について、 $I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \stackrel{i.i.d.}{\sim} B(1, p_k)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) より、

$$\begin{aligned}
E \left[\left\{ I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] &= \text{Var} \left[I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right] + E \left[I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right]^2 \\
&= p_j (1 - p_j) + p_j^2 \\
&= p_j \\
&= \int_{B_j} f(t) dt \\
&\sim \int_{B_j} \{ f(x) + (t-x)f'(x) + \dots \} dt \\
&\sim h f(x). \tag{62}
\end{aligned}$$

したがって、前述の正則条件から $f^{(5)}(x) < \infty$ より、ある有限な定数 C_1 を用いて下記の関係が成り立つ;

$$\gamma_0^2 E \left[\left\{ I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_1. \tag{63}$$

大カッコ内の第 2 項目について、 $x_m - t_k \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ ($k = 1, 2, \dots, N$) を用いて、

$$\begin{aligned}
E \left[\left\{ (x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] &= \text{Var} \left[(x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right] + E \left[(x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right]^2 \\
&\leq h^2 \left(\text{Var} \left[I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right] + E \left[I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right]^2 \right) \\
&= h^2 \{ p_j (1 - p_j) + p_j^2 \} \\
&= h^2 p_j \\
&\sim h^3 f(x).
\end{aligned} \tag{64}$$

したがって、同様にして、

$$\gamma_1^2 E \left[\left\{ (x_m - t_j) I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_2. \tag{65}$$

大カッコ内の第 3 項目について、

$$\begin{aligned}
E \left[\left\{ (x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] &= \text{Var} \left[(x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right] + E \left[(x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right]^2 \\
&\leq h^4 \left(\text{Var} \left[I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right] + E \left[I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right]^2 \right) \\
&= h^4 \{ p_j (1 - p_j) + p_j^2 \} \\
&= h^4 p_j \\
&\sim h^5 f(x).
\end{aligned} \tag{66}$$

したがって、同様にして、

$$\gamma_2^2 E \left[\left\{ (x_m - t_j)^2 I_m \left(\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_3. \tag{67}$$

大カッコ内の第 4 項目について、

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&= \text{Var} \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \right] \\
&\quad + E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\} \right]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left(\text{Var} \left[I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) \right] + \text{Var} \left[I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right] \right) \\
&\quad - 2\text{Cov} \left(\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right), \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k} I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left(E \left[I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) \right]^2 + E \left[I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right]^2 \right) \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 E \left[I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) \right] E \left[I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \{ p_{k+1} (1 - p_{k+1}) + p_k (1 - p_k) \} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 p_{k+1} p_k \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 (p_{k+1}^2 + p_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 p_{k+1} p_k \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 (p_{k+1} + p_k) \\
&\sim 2 \sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 h f(x). \tag{68}
\end{aligned}$$

したがって、同様にして、

$$\gamma_3^2 E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_4. \tag{69}$$

大カッコ内の第 5 項目について、

$$\begin{aligned}
& E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\
&\leq h^2 E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right], \tag{70}
\end{aligned}$$

で表現され、(68) の通りに期待値部分が導出できることから、同様にして、

$$\left(\frac{100\gamma_3^2}{h^2}\right) E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_5. \quad (71)$$

大カッコ内の第 6 項目について、

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] \\ & \leq h^4 E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right], \end{aligned} \quad (72)$$

で表現され、(68) の通りに期待値部分が導出できることから、同様にして、

$$\left(\frac{1764\gamma_3^2}{h^4}\right) E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_6. \quad (73)$$

大カッコ内第 7~9 項目は (69), (71), (73) と同様にして、

$$\gamma_4^2 E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_7. \quad (74)$$

$$\left(\frac{100\gamma_4^2}{h^2}\right) E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1}) I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) + (x_m - t_k) I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_8. \quad (75)$$

$$\left(\frac{1764\gamma_4^2}{h^4}\right) E \left[\sum_{k=1}^{N-1} w_{j-1,k}^2 \left\{ (x_m - t_{k+1})^2 I_m \left(\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right) - (x_m - t_k)^2 I_m \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N} \right) \right\}^2 \right] < C_9. \quad (76)$$

以上より、(63)~(76) から $E[Z_m^2]$ は、

$$E[Z_m^2] < \frac{18}{n^2 h} \times (C_1 + C_2 + \dots + C_9) \sim O\left(\frac{1}{n^2 h}\right). \quad (77)$$

また、 $|Z_m| = O\left(\frac{1}{nh}\right)$ を用いて、

$$|Z_m|^3 < Z_m^2 O\left(\frac{1}{nh}\right), \quad (78)$$

であることから、

$$E|Z_m|^3 = O\left(\frac{1}{n^2 h}\right) \times O\left(\frac{1}{nh}\right) = O\left(\frac{1}{n^3 h^2}\right). \quad (79)$$

したがって、(59)、(77) より、

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n E |Z_m - E[Z_m]|^3 &= O\left(\frac{1}{n^2 h^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2 h}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2 h^2}\right). \end{aligned} \quad (80)$$

$\hat{f}_j(x)$ の分散を $\sigma[\hat{f}_j(x)]^2$ とすると、 $\sigma[\hat{f}_j(x)]^2 \sim \frac{C}{nh}$ より、

$$\frac{\sum_{m=1}^n E |Z_m - E[Z_m]|^3}{\sigma[\hat{f}_j(x)]^3} = \frac{O\left(\frac{1}{n^2 h^2}\right)}{O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}} h^{\frac{3}{2}}}\right)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{nh}}\right) = o(1). \quad (81)$$

参考文献

- [1] L. I. Boneva, D. Kendall, and I. Stefanov(1971), "Spline Transformations: Three New Diagnostic Aids for the Statistical Data-Analyst." *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 33.1, 1-71.
- [2] M. C. Jones, M. Samiuddin, A. H. AL-Harbey and T. A. H. Maatouk(1998), "The edge frequency polygon", *Biometrika*, Vol.85, Issue 1, 235-239.
- [3] Keh-Shin Lii, and M. Rosenblatt(1975), "Asymptotic behavior of a spline estimate of a density function", *Computers & Mathematics with Applications*, 1(2), 223-235.
- [4] M. C. Minnotte(1996), "The Bias-Optimized Frequency Polygon", *Computational Statistics*, 11, 35-48.
- [5] M. C. Minnotte(1998), "Achieving Higher-Order Convergence Rates for Density Estimation with Binned Data", *Journal of the American Statistical Association*, Vol.93, No.442, 663-672.
- [6] M. Sagae and D. W. Scott(1997), "Bin Interval Method of Locally Adaptive Nonparametric Density Estimation", Joint Statistical Meetings 1997.
- [7] I. J. Schoenberg(1973), "Splines and Histograms", *Spline Functions and Approximation Theory*, Birkhauser, Basel, 277-327.
- [8] D. W. Scott(1985), "Frequency Polygons: Theory and Application", *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 80, No. 390, 348-354.
- [9] D. W. Scott and M. Sagae(1997), "Adaptive Density Estimation with Massive Data Sets", Joint Statistical Meetings 1997.
- [10] 齊藤, 寒河江 (2021), "3 次スプライン関数によるヒストグラム平滑化とその漸近的性質～ Boneva, Kendall and Stefanov 型と Lii and Rosenblatt 型モデルの理論的同等性～", 人間社会環境研究, 第 41 号, 49-62.
- [11] 齊藤, 寒河江 (2022), "多項式型 Histogram の平滑化とその漸近的性質", 金沢大学人間社会研究域ディスカッションペーパー, No.68.